

## Inhalt

Editorial	Seite 1	Neue Übungsaufgabe: Einkommensverteilung	Seite 6	Konstruktion der Sinus-Funktion am Einheitskreis	Seite 10
Weltraumfahrtstuhl	Seite 1-2	Standardisierte Reifeprüfung Mathematik AHS	Seite 7-8	Rätselcke	Seite 11
Unterrichtsidee zur Stochastik	Seite 3-4	Leserbrief	Seite 8	Rechnen mit komplexen Zahlen mit dem FX-991DE X	Seite 11
Neu in der Materialdatenbank	Seite 4	Übersicht der Umrechnungsfaktoren	Seite 9	Lehrer-Info-Service und Impressum	Seite 12
RSA-Verschlüsselung	Seite 5				

## Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

im CASIO forum zeigen Kolleginnen und Kollegen Anregungen und Beispiele für den gewinnbringenden Unterrichtseinsatz unserer Rechner.

In dieser Ausgabe werden Sie über einige neue Möglichkeiten informiert, die durch die Weiterentwicklung unserer technisch-wissenschaftlichen Rechner entstehen. Science-Fiction erwartet Sie, wie auf dieser Seite zu sehen, als Erstes. Neben linearer Algebra und Stochastik mit Grafik- und CAS-Rechnern erwarten Sie ein Einstieg in das aktuelle Thema Verschlüsselungen, Interpolationspolynome und Hinweise auf neue Möglichkeiten des FX-CG50 in der analytischen Geometrie sowie des FX-991DE X mit komplexen Zahlen.

Wir werfen einen Blick auf das berufsbildende österreichische Abitur, modellieren Funktionen und geben wie immer viele nützliche Tipps und Hinweise. Auch ein Rätsel ist wieder dabei – die Lösung finden Sie wie immer in der Materialdatenbank.

Zum Ausprobieren der Beispielaufgaben im Unterricht können Sie unsere Grafikrechner im Klassensatz einschließlich Zubehör kostenlos für vier Wochen ausleihen. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrersupport. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an [education@casio.de](mailto:education@casio.de).

Ihr Redaktionsteam

CASIO Educational Projects

## Aktuelle Anwendungsaufgaben

# Fahrstuhl in den Weltraum

Autor: Ralf Hoheisel, Berufsbildende Schule ME, Hannover



Es ist seit langer Zeit der Traum des Menschen, das Weltall zu erreichen. Dieser Traum ist Anfang der 70er-Jahre Realität geworden und hat über die Landung auf dem Mond zur, bis heute ständig besetzten, Raumstation ISS geführt.

Hauptkritikpunkt aller Weltraumprogramme ist der Kostenaufwand, unter dem Menschen und Material ins All befördert werden; der Start einer Sojus-Rakete kostet ca. 50 Mio. Euro.

Die Idee, „einfach“ einen Aufzug zu bauen, der von der Erdoberfläche bis in den geostationären Orbit reicht, wurde schon 1895 durch Konstantin Tsiolkovsky entwickelt, inspiriert durch den Eiffelturm. Allerdings scheiterte die Realisierung bis heute an der Tatsache, dass nicht genügend druckfeste

Materialien zum Bau einer Turmstruktur zur Verfügung stehen.

Eine andere Idee ist es, ein Seil aus dem geostationären Orbit herabzulassen. Das wurde schon von mehreren Wissenschaftlern vorgeschlagen. Diese Vision erlangte 1975 durch einen Aufsatz<sup>1</sup> von Jerome Pearson, einem amerikanischen Airforce-Ingenieur, erneute Beachtung. Er beschrieb unter anderem die mathematisch-physikalischen Grundlagen, nach denen ein Seil zu konstruieren sei, das von der Erdoberfläche über den geostationären Orbit so weit hinaus ins All reicht, bis sich die Kräfte ausgleichen. Er ermittelte auch die Anforderungen an dieses Seilmaterial.

Unter Bezug auf diesen Aufsatz wird zunächst die Gleichung entwickelt, die die Kraft

Fortsetzung auf Seite 2

auf ein Seilelement beschreibt, sowie die Differentialgleichung, nach der sich der Seilquerschnitt mit zunehmender Höhe ändert. Anschließend liefert eine Betrachtung der Seilquerschnittsverhältnisse Bedingungen, die ein mögliches Seilmaterial erfüllen muss. Die hier dargestellten Ausführungen sind aus Platzgründen knapp gehalten, eine ausführliche Ausarbeitung finden Sie unter: <http://www.casio-schulrechner.de/de/lehrerschule/materialdatenbank/>

**1. Betrachtung der Kräfte, die auf ein Seilelement wirken**

Auf ein Seilelement der Länge  $dr$  mit dem Abstand  $r$  von der Erdoberfläche wirken die Gravitationskraft

$$dF_G \text{ mit } dF_G = G \cdot M \frac{\rho \cdot A}{r^2} dr,$$

sowie die Zentripetalkraft mit  $dF_Z$  mit

$$dF_Z = \rho \cdot A \cdot \frac{v_r^2}{r} \cdot dr.$$

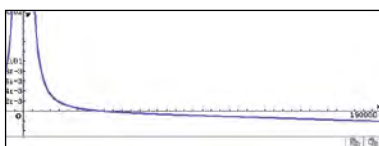
Eine Kräftebilanz liefert die resultierende Kraft

$$dF_r = G \cdot M \frac{\rho \cdot A}{r^2} dr - \rho \cdot A \cdot \frac{v_r^2}{r} \cdot dr,$$

die durch einige Umformungen mithilfe physikalischer Gesetzmäßigkeiten in eine vereinfachte Form entwickelt wird:

$$dF_r = \rho \cdot A \cdot g_0 \cdot r_0^2 \cdot \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_s^3} \right) dr$$

dabei ist  $r_s = 42,157 \cdot 10^3 \text{ km}$ .



Skizze des Graphen von  $dF$  mit  $\rho \cdot A = 2 \frac{\text{kg}}{\text{km}}$ , Erdradius  $r_0 = 6,378 \cdot 10^3 \text{ km}$

Erdbeschleunigung  $g_0 = 9,81 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

und Radius im geostationären Orbit.

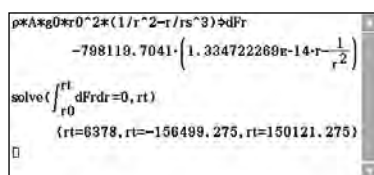
Die auf das Gesamtsystem wirkende Kraft  $F$

lässt sich nun mit  $F_r = \int_{r_0}^{r_t} dF_r dr$  berechnen,

wobei  $r_t$  den Radius des Seilendes beschreibt. Bei entsprechender Seillänge ist  $F_r = 0$ , das System also kräfteelos. Damit gilt:

$$0 = \int_{r_0}^{r_t} dF_r = \int_{r_0}^{r_t} \rho \cdot A \cdot g_0 \cdot r_0^2 \cdot \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_s^3} \right) dr = \int_{r_0}^{r_t} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_s^3} \right) dr,$$

mit der einzig sinnvollen Lösung  $r_t = 150.121 \text{ km}$ .



Die grundsätzliche Idee ist, dass ein „Seil“ aus dem Weltraum kommt, bis zur Erde reicht, dabei frei hängt und theoretisch noch nicht einmal am Erdboden befestigt sein müsste.

**2. Differentialgleichung der Querschnittsfläche**

Das Seil ist über seine Länge der Spannung  $\sigma$  ausgesetzt. Damit diese über die Länge konstant bleibt, muss sich der Seilquerschnitt ändern, mit der größten Querschnittsfläche im geostationären Orbit. Damit wird  $A$  eine von  $r$  abhängige Größe  $A(r)$  und

$$dF_r = \rho \cdot g_0 \cdot r_0^2 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_s^3} \right) \cdot A(r) \cdot dr.$$

Mit  $dF_r = \sigma \cdot dA$  und der Seilspannung  $\sigma$

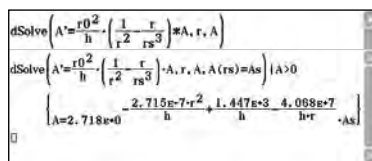
$$\text{folgt } dA = \frac{\rho \cdot g_0 \cdot r_0^2}{\sigma} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_s^3} \right) \cdot A(r) \cdot dr.$$

In dieser Gleichung wird noch  $\frac{\rho \cdot g_0}{\sigma} = \frac{1}{h}$

ersetzt, wobei  $h$  die spezifische Reißlänge (die Länge, unter der ein Seil unter seinem Eigengewicht reißt) eines möglichen Werkstoffes beschreibt. Einsetzen führt zu der Differentialgleichung

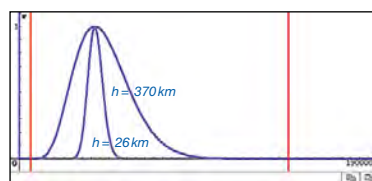
$$dA = \frac{r_0^2}{h} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_s^3} \right) \cdot A(r) \cdot dr,$$

die sich durch Trennung der Variablen und Integration oder mittels ClassPad II lösen lässt. Die Konstante  $const(1)$  ergibt sich durch die Bedingung  $A(r_s) = A_s$ , also die Querschnittsfläche im geostationären Orbit.



Die nächsten Schritte sind: Definieren von  $A(r)$ , Variieren des Parameters  $h$  und  $A_s = 1$  setzen. Das Ergebnis ist dann die Funktion, die den Seilquerschnitt über die Seillänge beschreibt.

Die unten stehenden Graphen veranschaulichen den Sachverhalt für die Reißlängen (Stahl) und (Dyneema, eine Polyethylenfaser).



**3. Querschnittsverhältnisse**

Um eine Aussage über die Realisierung des Seils zu treffen, wird das Querschnittsverhältnis  $\frac{A_s}{A(r_0)}$  betrachtet.

Stahl ( $h = 26 \text{ km}$ ):

$$\frac{A_s}{A(r_0)} = \frac{1}{2,551 \cdot 10^{-83}} = 3,92 \cdot 10^{82}$$

PE-Faser ( $h = 370 \text{ km}$ ):

$$\frac{A_s}{A(r_0)} = \frac{1}{1,571 \cdot 10^{-6}} = 0,637 \cdot 10^6$$

Graphen ( $h = 3.000 \text{ km}$ ):

$$\frac{A_s}{A(r_0)} = \frac{1}{0,192} = 5,21$$

Für Stahl ist das Querschnittsverhältnis unvorstellbar hoch und, obwohl theoretisch realisierbar, praktisch unmöglich zu verwirklichen, da es nicht möglich ist, eine derartige Stoffmenge ins All zu schaffen. Ähnliches gilt für die PE-Faser, deren Querschnittsfläche im geostationären Orbit noch mehr als 600.000-mal größer als am Erdboden wäre.

Ohne ein geeignetes Seilmaterial mit erheblich größerer Reißlänge wird eine Realisierung des Weltraum-Fahrstuhls nicht möglich sein.

Zurzeit wird an einem vielversprechenden Werkstoff geforscht, der aus Graphit in Form von Kohlenstoff-Nanoröhrchen besteht und zu Seilen verwoben werden kann. Mit diesem neuen Seilmaterial haben sich bereits im Labor theoretische Reißlängen von um die 6.000 km ermitteln lassen, die zu einem Querschnittsverhältnis von weniger als 2,3 führen würden. Sollten eines Tages das Produktionsproblem gelöst und ebenso die Fragen der Beständigkeit gegen äußere Einflüsse beantwortet sein, ist an eine Realisierung des Weltraum-Fahrstuhls zu denken.

Derzeit forschen US-amerikanische und japanische Unternehmen (Prototyp bis 2050) an der Umsetzung. In der Space-Elevator-Challenge werden Realisierungsschritte (Seilmaterial, Antrieb, Stromversorgung usw.) ausgeschrieben und prämiert.

**Lehrerspezial von CASIO**

**Ozeane und Meere – Mathematik zum Eintauchen**

Angeregungen für einen spannenden, realitätsnahen Matheunterricht erhalten Lehrkräfte mit den Lehrerspezialen. In der aktuellen Ausgabe greift CASIO das Thema des Wissenschaftsjahres 2017 auf. Mit anschaulichen Unterrichts Anregungen wird gezeigt, wie viel Mathematik in den Tiefen der Meere steckt. Dr. Joachim Dengg, Schulkoordinator am GEOMAR Helmholtz-Zentrum für Ozeanforschung in Kiel, erklärt zudem, wie es seinem Institut gelingt, Jugendliche mit Meeresthemen für MINT-Fächer zu begeistern.

Damit für Schülerinnen und Schüler von heute die Gleichung „Spannendes Thema + Mathematik = gute Berufsaussichten“ aufgeht, werden in der Rubrik Berufsspezial passende Berufsfelder vorgestellt, in denen Meer und Mathematik zusammenfließen.



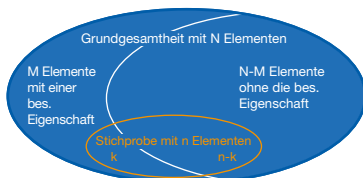
# Zusammenhang zwischen Binomial- und hypergeometrischer Verteilung

Autorin: Dr. Kinga Szűcs, Jena

**Stichproben bereiten sowohl Lernenden als auch Lehrenden oft Kopfzerbrechen: Obwohl sie in der Praxis eigentlich nie mit Zurücklegen genommen werden und demzufolge durch eine entsprechende hypergeometrische Verteilung modelliert werden sollten, wird in Schulbüchern, diversen Leistungs- und Abiturprüfungen die Anwendung der Binomialverteilung erwartet. Zweifelsohne hängen die beiden Verteilungsarten stark zusammen. Dieser Zusammenhang sollte unbedingt im Mathematikunterricht thematisiert werden, eine große Hilfe hierbei kann der Einsatz von CAS leisten.**

## Der mathematische Hintergrund

Betrachtet wird eine Grundgesamtheit bestehend aus  $N$  Elementen, von denen  $M$  über eine besondere Eigenschaft (z.B.  $M$  Linkshänder in einer Gruppe von  $N$  Personen,  $M$  fehlerhafte Schrauben in einer Menge von  $N$  Schrauben etc.) verfügen. Aus dieser Grundgesamtheit wird eine Stichprobe vom Umfang  $n$  genommen, darunter  $k$  mit der besonderen Eigenschaft und  $n-k$  ohne die besondere Eigenschaft.



Die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Ziehen ein Element mit der besonderen Eigenschaft zu erwischen, beträgt  $p = \frac{M}{N}$ .

Es ist auch klar, dass sich diese Wahrscheinlichkeit nicht ändert, wenn das gezogene Element in die Grundgesamtheit zurückgelegt wird. Die Gegenwahrscheinlichkeit zu  $p$  wird durch  $q$  bezeichnet und kann entweder aus  $q=1-p$  oder aus  $q = \frac{N-M}{N}$  bestimmt werden.

An dieser Stelle wird auf die Herleitung nicht eingegangen, es gilt aber: Wird  $n$ -mal hintereinander ein Element mit Zurücklegen gezogen, so ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe genau  $k$  Elemente mit der besonderen Eigenschaft vorkommen:  $p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ . Wird die Stichprobe ohne Zurücklegen gezogen, so ist nach dem Laplace'schen Modell (salopp: „günstig durch möglich“) schnell einzusehen, dass in diesem Fall

$$p_k = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ gilt.}$$

Es ist schon interessant und überhaupt nicht auf der Hand liegend, dass die Erwartungswerte (jeweils  $E(X)=np$ ) übereinstimmen. Ebenfalls interessant ist es, dass sich die Standardabweichungen ( $D(X) = \sqrt{npq}$  für die Binomialverteilung

$$\text{und } D(X) = \sqrt{npq \frac{N-n}{N-1}}$$

nur in einem Faktor voneinander unterscheiden. Dieser, nämlich  $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$  ist zum Beispiel größer als 0,99, falls  $n$  kleiner ist als etwa  $\frac{1}{50}N$ . Die interessanteste Frage ist jedoch, unter welchen Bedingungen die Einzelwahrscheinlichkeiten, und zwar für jeden möglichen Wert von  $k$ , quasi übereinstimmen, weil ja in diesem Fall die eine Verteilung anstatt der anderen als Modell genommen werden kann. Hierzu bietet folgende Aufgabe einen möglichen Einstieg.

## Vergleich von Stichproben mit und ohne Zurücklegen mit CASIO ClassPad II

In einer Schulklasse mit 25 Schülern gibt es 5 Linkshänder. Es werden zufällig 4 Schüler – ohne Zurücklegen – aus der Klasse ausgewählt und gefragt, ob sie Linkshänder seien. Bezeichne  $\xi$  die Anzahl der Linkshänder in der Stichprobe.

## Aufgabe

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten, mit denen  $\xi$  die einzelnen Werte annimmt. Stelle diese in einem Säulendiagramm dar. Berechne die obigen Wahrscheinlichkeiten auch für den Fall, dass die Stichprobe mit Zurücklegen gezogen wird. Stelle diese im gleichen Diagramm dar.

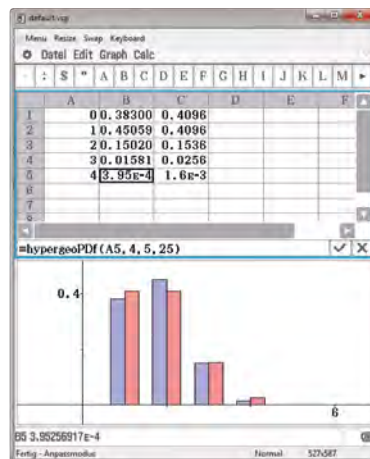


Abb. 1: Lösung der Teilaufgabe a)

## Aufgabe

b) Vergleiche nun die Wahrscheinlichkeiten: Was kannst du behaupten, wenn du die Unterschiede zwischen den Einzelwahrscheinlichkeiten beobachtest? Berechne in einer weiteren Spalte diese Unterschiede.

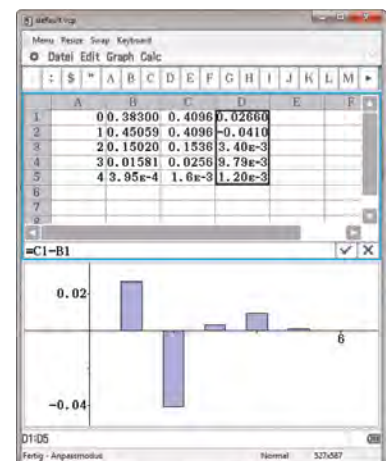


Abb. 2: Lösung der Teilaufgabe b)

In der Abbildung 1 ist die Lösung zu Teilaufgabe a) zu sehen, Abbildung 2 zeigt die Lösung der Teilaufgabe b). Es ist dem Diagramm sowie den Werten in der vierten Spalte zu entnehmen, dass die größte Differenz mehr als 4 % beträgt. An dieser Stelle kann bereits über mögliche Kriterien im Plenum diskutieren werden: Wann können wir sagen, dass zwei Einzelwahrscheinlichkeiten für praktische Zwecke identisch sind?

## Aufgabe

c) Untersuche, was mit den Einzelwahrscheinlichkeiten passiert, wenn eine gleichgroße Stichprobe aus einer größeren Grundgesamtheit ( $N=50, 100, 1.000$  etc.) bei konstantem  $p$  genommen wird. Wie sind die Ergebnisse zu interpretieren?

Der ClassPad II kann die aufwendige Arbeit mit den Berechnungen abnehmen, die dafür auch noch schnell durchführbar sind, es müssen ja nur die Parameter in den Argumenten der Befehle BinomialPDF( $k, n, p$ ) und HypergeoPDF( $k, n, M, N$ ) geändert werden. Auch die grafischen Darstellungen, insbesondere wenn sie auf verschiedenen Handheld-Geräten erstellt und die Geräte nebeneinandergelegt werden, tragen zum Finden von Zusammenhängen bei. In Abbildung 3–5 ist eine Sequenz von Lösungen für die Fälle  $N=50, 100$  und  $1.000$  zu finden.

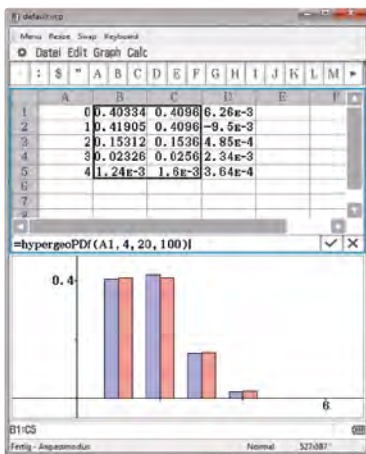
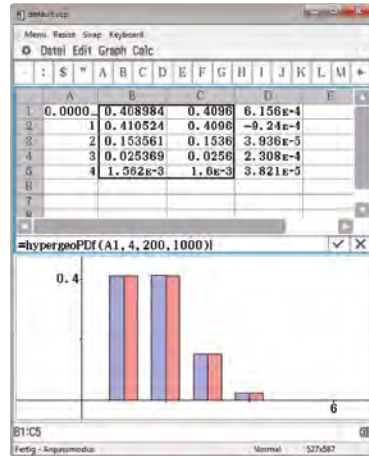
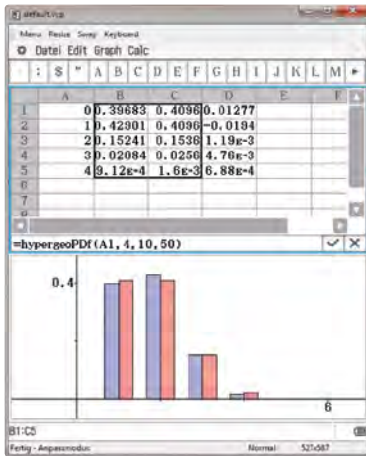


Abb. 3–5: Lösungen für  $N = 50, 100$  und  $1.000$  bei gleich großer Stichprobe und konstantem  $p$

### Schlussfolgerung

Die Lernenden können beim Vergleich der Ergebnisse und der Diagramme verschiedene Beobachtungen machen. Hierzu gehört die Erkenntnis, dass sich die Werte der Binomialverteilung nicht ändern, was mit dem konstant gebliebenen  $p$  zusammenhängt. Überdies ist es offensichtlich, dass mit immer größer werdendem  $n$  die hypergeometrische Verteilung sich der Binomialverteilung „anpasst“: Die Abweichungen zwischen den Einzelwahrscheinlichkeiten werden immer kleiner, bei  $N=1.000$  ist der

größte Unterschied etwa 0,001. Um vom Beispiel zum allgemeinen Fall zu kommen, könnten anschließende Arbeitsaufträge etwa lauten:

### Aufgabe

d) Untersuche weitere Werte für  $N$  (weiterhin bei konstantem  $p$  und konstantem Stichprobenumfang): Wie groß soll die Grundgesamtheit sein, damit der Unterschied zwischen Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen „verschwindet“, z.B. derart, dass die Unterschiede zwischen den Einzelwahrscheinlichkeiten weniger als 0,0001 betragen?

e) Wähle nun einen anderen Wert für  $p$ , z.B.  $p=0,5$ . Finde mithilfe deines Taschenrechners heraus, um wie viel größer die Grundgesamtheit bezogen auf die Stichprobe sein muss, damit für praktische Zwecke keine relevanten Unterschiede zwischen Ziehen mit und ohne Zurücklegen entstehen.



## Neu in der Materialdatenbank

Unter der Rubrik „Neu in der Materialdatenbank“ finden Sie in Zukunft Hinweise auf „Schätze“, die z.B. aufgrund ihrer Länge oder wichtiger Zusatzdateien nicht im CASIO forum abgedruckt werden konnten.

Die Materialdatenbank können Sie natürlich auch selber durchstöbern – Sie finden sie auf [www.casio-schulrechner.de](http://www.casio-schulrechner.de) im Bereich Lehrer & Schule. Dort kann mit verschiedenen Filtern nach passenden Einträgen gesucht werden.

Hier wird, um ein Beispiel zu geben, auf den neu eingestellten Artikel „Interpolationspolynome“ von Rolf Mantyk (Hochschule Niederrhein, Krefeld) hingewiesen. In diesem Beitrag werden Methoden vorgestellt, die für den Leistungskurs in der gymnasialen Oberstufe durchaus gut verständlich, jedoch rechnerisch relativ aufwendig sind.

Mit den Möglichkeiten des FX-CG50 lässt sich die Aufgabe aber im Rahmen einer reflektierten Nutzung digitaler Werkzeuge – analog zu den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife – durchaus in der Schule bearbeiten.

Herr Mantyk beschreibt detailliert die Lösung mit dem GTR. Er macht deutlich, dass es bewusster Entscheidungen bedarf, mit welchen Instrumenten die jeweils relevanten Daten zu bearbeiten und zwischen welchen der Arbeitsumgebungen des Rechners auszutauschen sind, wenn der Überblick gewahrt werden soll.

So entwickelt sich die vorliegende Problemstellung fast beiläufig zu einer Erkundungstour quer durch das auf den ersten Blick scheinbar zusammenhangslose Dickicht unterschiedlichster Optionen, mit denen der FX-CG50 aufzutrompfen vermag. Hier nun der Anfang des Artikels und ein QR-Code, der direkt zum kompletten Text in die Materialdatenbank leitet:

### Interpolationspolynome

Die Berechnung der Koeffizienten eines Interpolationspolynoms hinsichtlich gegebener Stützpunkte führt unter anderem zu einer sogenannten Vandermonde-Matrix, die es zu invertieren gilt. Beim FX-CG50 empfiehlt sich zu deren Vorbereitung der

Einsatz der implementierten Tabellenkalkulation, um sich dadurch variable Spielräume offenzuhalten.

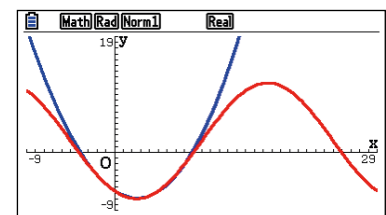


Abbildung 1: Eine gut passende Interpolation



QR-Code zum Artikel „Interpolationspolynome“ von Rolf Mantyk

# RSA-Verschlüsselung mit dem ClassPad

Autor: Arnold Zitterbart, Triberg

Das RSA-Verschlüsselungsverfahren, benannt nach Ronald Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman, entstand 1978 unter Rückgriff auf die zahlentheoretischen Ergebnisse von Pierre de Fermat (1607 – 1665) und Leonhard Euler (1707 – 1783). Es handelt sich dabei um ein asymmetrisches Verschlüsselungsverfahren, bei dem eine Nachricht mit einem allen zugänglichen Schlüssel verschlüsselt wird, diese Nachricht aber nur von dem zugeordneten Empfänger entschlüsselt werden kann.

Situation: Alice will sich geheime Nachrichten zuschicken lassen, die nur sie entschlüsseln kann. Sie erzeugt dazu 3 Zahlen: N, e und d.

N ist das Produkt von zwei (in der Praxis möglichst großen) Primzahlen p und q.

$$p=41, q=23 \Rightarrow N=943$$

e wird so gewählt, dass es teilerfremd zu  $(p-1) \cdot (q-1)$  ist.

Alice wählt dazu eine Primzahl unter  $(p-1) \cdot (q-1)$ , die nicht in der Primfaktorzerlegung von  $(p-1) \cdot (q-1)$  vorkommt.

$$(p-1) \cdot (q-1) = 880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 11; \text{ Alice wählt } e=79.$$

Diese beiden Zahlen, N=943 und e=79, werden von Alice veröffentlicht und bilden den öffentlichen Schlüssel.

Wenn Bob eine geheime Nachricht an Alice senden will, verschlüsselt er diese mit dem öffentlichen Schlüssel N und e; soll z.B. 88 (=ASCII-Code von X) verschlüsselt werden, berechnet Bob:  $88^e \bmod N = 88^{79} \bmod 943 = 7$ .

Den Code c=7 sendet Bob an Alice. Will ein Unbefugter rekonstruieren, aus welcher Zahl der Code 7 entstanden ist, so muss er folgende Gleichung lösen:  $x^{79} \bmod 943 = 7$ .

```

Generieren von N, e
p:=41 : q:=23 : n:=p*q
                                     943
factor((p-1)(q-1))
                                     24·5·11
e:=79
                                     79
d:=invmod(e, (p-1)(q-1))
                                     479

Bobs Verschlüsselung
c:=mod(88e, n)
                                     7

Entschlüsselung durch Alice
mod(cd, n)
                                     88
    
```

Das funktioniert bei kleinen Zahlen problemlos durch Probieren. In der Praxis werden aber für N Zahlen mit mehreren hundert Stellen verwendet, sodass selbst leistungsfähige PCs die Modulo-Wurzel erst nach mehreren Jahren finden würden.

Alice wird die Nachricht in der Praxis also nicht mit einem Probiervorgang entschlüsseln. Sie entschlüsselt die Nachricht mithilfe einer Dekodierzahl d=479, die nur sie kennt und die absolut geheim bleiben muss:  $7^{479} \bmod 943 = 88$ .

Hinweis: Der ClassPad muss dazu im Standard-Modus betrieben werden.

Wie kommt Alice zu dieser Zahl?

Alice kennt die beiden Primzahlen p=41 und q=23, aus denen N gebildet wird, daher kann sie auch  $(p-1) \cdot (q-1)$  berechnen. Sie sucht nun eine Zahl d mit  $e \cdot d \bmod (p-1) \cdot (q-1) = 1$ .

Die Zahl d heißt das zu e inverse Element modulo  $(p-1) \cdot (q-1)$ .

Zur Bestimmung von d mit dem ClassPad wird der erweiterte Euklid'sche Algorithmus in der Programm-Prozedur invmod verwendet.

```

invmod | N | a, b
'a, b → invElement zu a
      bzgl. mod b
Local q, r, s, s1, s2, bb
b→bb : 1→r
1→s : 0→s1
While r≠0
  int(a/b)→q : a-q*b→r
  b→a : r→b
  s-q*s1→s2 : s1→s : s2→s1
WhileEnd
If s<0
Then
  s+bb→s
IfEnd
Return s
    
```

Beim Experimentieren mit dem ClassPad mit größeren Zahlen wird für das modulare Potenzieren auf die Programm-Prozedur pmod zurückgegriffen.

```

pmod | N | a, k, m
'berechnet ak mod m
Local pot, erg
1→erg : a→pot
While k≠0
  if mod(k, 2)=1
  Then
    mod(erg*xpot, m)→erg
  IfEnd
  mod(pot*xpot, m)→pot
  int(k/2)→k
WhileEnd
Return erg
    
```

Ein Beispiel mit großen Zahlen:  
 $p=1234577, q=9876553 \Rightarrow$   
 $N=12193365173081$

$e=79$  kommt nicht in der PFZ von  $(p-1) \cdot (q-1)$  vor.

Alice kann also  $N=12193365173081$  und  $e=79$  als öffentlichen Schlüssel verwenden. Bob will ihr die Botschaft „SCHATZ“ zusenden:  $836772 \cdot 658490$   
 Bob verschlüsselt:  
 $836772^{79} \bmod N$  und  
 $658490^{79} \bmod N$   
 ... und sendet diese verschlüsselte Nachricht an Alice.

```

Generieren von N, e
p:=1234577 : q:=9876553
                                     1234577
n:=p*q
                                     12193365173081
factor((p-1)(q-1))
                                     27·3·72·73·151·58789
e:=79
                                     79

Bobs Verschlüsselung
c1:=pmod(836772, e, n)
                                     8266347829456
c2:=pmod(658490, e, n)
                                     9157369740541
    
```

Alice dekodiert die Nachricht mit ihrem geheimen Schlüssel.

```

Entschlüsselung durch Alice
d:=invmod(e, (p-1)(q-1))
                                     3858656348719
pmod(c1, d, n)
                                     836772
pmod(c2, d, n)
                                     658490
    
```

Es bleibt zu klären, ob das RSA-Verfahren wirklich sicher ist. Schließlich gibt es einen schnellen Algorithmus, um die Dekodierzahl mithilfe von  $(p-1) \cdot (q-1)$  zu bestimmen. Der öffentliche Schlüssel informiert aber nur über N und nicht über seine beiden Primfaktoren p und q. Diese lassen sich bei dem letzten Beispiel mit dem ClassPad nicht mehr bestimmen.

In der Praxis wird also N aus so großen Primfaktoren zusammengesetzt, dass die Zerlegung unverhältnismäßig lange dauern würde. Konkret bedeutet das, dass RSA nur so lange sicher ist, bis ein schneller Algorithmus für die PFZ gefunden ist.

# Neue Übungsaufgabe: Einkommensverteilung

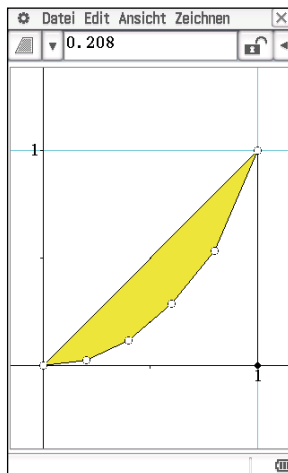
Seit Anfang Juni finden sich im Aufgabenpool des Bundesministeriums für Bildung neue Typ-2-Übungsklausuraufgaben für die SRP in Mathematik.<sup>1</sup> Die folgende auszugsweise Bearbeitung der „Einkommensverteilung“ mit dem ClassPad II zeigt beispielhaft die besondere Technologiekomponente.

Die nachstehende Tabelle zeigt die Einkommensverteilung in Österreich aus dem Jahr 2006. In Spalte A steht der Anteil der nach Einkommen geordneten Bevölkerung und in B der entsprechende Anteil an den gesamten Bruttoeinkommen. Die 20% der Bevölkerung mit dem niedrigsten Bruttoeinkommen erhalten z.B. nur 2,2% des Gesamtbruttoeinkommens, dagegen die 20% mit dem höchsten  $1 - 53,3\% = 46,7\%$ .

	A	B	C
1	0.2	0.022	
2	0.4	0.117	
3	0.6	0.288	
4	0.8	0.533	
5	1	1	
6			

=B4+0.467

Der Grad der Ungleichverteilung lässt sich grafisch leicht erfassbar visualisieren.



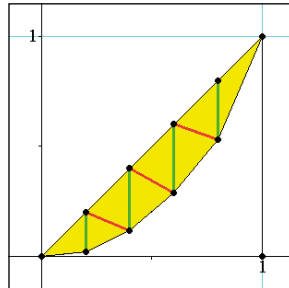
Die gelbe Fläche zeigt den Unterschied zwischen der realen Einkommensverteilung zu einer, in der alle Personen gleich viel verdienen, also der Gitterdiagonalen. Das Verhältnis des Inhalts der gelben Fläche zu dem gesamten unter der Diagonalen von 0,5 wird Gini-Ungleichheitskoeffizient (GUK) genannt. Dieser kann Werte von 0, bei der Gleichverteilung, bis 1, d.h., einer erhält alles, annehmen.

Mit dem Flächeninhalt 0,208 aus dem Messfeld beträgt also in diesem Fall der

$$\text{GUK} = \frac{0,208}{0,5} = 0,416.$$

Alternativ lässt sich der Flächeninhalt elementargeometrisch bestimmen, indem der

gelbe Bereich z.B. in zwei Dreiecke und drei Trapeze zerlegt wird, wobei anstelle der „ungewohnten“ Trapeze auch je zwei weitere Dreiecke (rote Unterteilung) eingezeichnet werden können.



Die reine Dreieckszerlegung hat die nette Eigenschaft, dass je zwei immer die gleiche grüne Basis und alle die Höhe 0,2 haben, also paarweise die Fläche

$$2 \times \frac{1}{2} \times \text{Basis} \times 0,2.$$

An dieser Stelle lohnt es sich, in die Tabellenkalkulation zurückzukehren. Die Länge der Basis der Dreieckspaare ist die Differenz aus den Werten in Spalte A und B. Der zugehörige Flächeninhalt wird jeweils in Spalte C berechnet.

	A	B	C
1	0.2	0.022	0.0356
2	0.4	0.117	0.0566
3	0.6	0.288	0.0624
4	0.8	0.533	0.0534
5	1	1	
6			

=(A1-B1)×0.2

Mit dem sum-Befehl im Menü Calc unter Liste-Berechnen ergibt sich natürlich wieder der Gesamtwert, der zuvor in der Geometrieanwendung bestimmt worden ist.

	A	B	C
1	0.2	0.022	0.0356
2	0.4	0.117	0.0566
3	0.6	0.288	0.0624
4	0.8	0.533	0.0534
5	1	1	
6			0.208

=sum(C1:C4)

Dieses Ergebnis lässt sich jetzt übrigens recht einfach auf beliebige gleichmäßige Unterteilungen in  $n$ -tel verallgemeinern:

$$\text{GUK} = \frac{2}{n} \times \left( \frac{n-1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} B_i \right).$$

Die vollständige Bearbeitung der Aufgabe „Einkommensverteilung“ und der weiteren neuen zur Matura 2018 sowie Lösungen mit dem ClassPad II von Typ-1- und Typ-2-Übungsaufgaben aus dem Pool finden Sie in der neuen Materialdatenbank unter [www.casio-schulrechner.at](http://www.casio-schulrechner.at)

## Buchvorstellung

### Mathematik verstehen

Nachdem letztes Schuljahr bereits zwei Bände CASIO Technologietraining für die 5. und 6. Klasse zur Lehrbuchserie „Mathematik verstehen“ des öbv erhältlich und approbiert waren, gibt es nun auch die Bände für die Klassen 7 und 8. Jedes Heft begleitet das entsprechende Schulbuch in idealer Weise anhand des ClassPad II. Der Umgang mit dem Gerät wird für sämtliche Themengebiete des Jahrgangs in sinnvollem Umfang und einer klaren, nachvollziehbaren Sprache dargestellt.



Durch diese „Schritt für Schritt“-Anleitung ist das Buch für das Selbststudium, die Vor- und Nachbereitung und als Nachschlagewerk geeignet. Es enthält eine Übersicht der verwendeten Befehle mit einer Musteraufgabe, das Inhaltsverzeichnis verweist auf konkrete Themenbereiche. Weil sämtliche Beispiele ausführlich erklärt und vollständig durchgerechnet werden, kann es auch unabhängig vom Lehrwerk eingesetzt werden.

Das CASIO Technologietraining für die 5. bis 7. Klassen wurde von Mag. Roland Prinz und Band 8 von Mag. Julia Marsik geschrieben.

# Berufsbildung exponentiell

Autorin: Prof. Dr. Hilde Kletzl, HTBLuVA Salzburg, Pädagogische Hochschule Salzburg Stefan Zweig

**In Österreich steht der zentrale Reifeprüfungstermin an höheren technischen Lehranstalten (HTL) im Frühjahr 2018 im Zeichen der Clusterzusammenlegung im Fachbereich Angewandte Mathematik. Bisher erhielten unterschiedliche Ausbildungsschienen wie Elektrotechnik, Kunststofftechnik, Bautechnik oder auch Chemieingenieurwesen eigene, für den Fachbereich zugeschnittene Aufgaben.**

Im Frühjahr 2018 wird es erstmals für die überwiegende Mehrheit der Ausbildungsschwerpunkte im Bereich der HTL eine gemeinsame Aufgabenstellung geben; ein Teil der Aufgaben soll weiterhin im schulformspezifischen Kontext stehen, er muss aber eine viel größere Bandbreite abdecken und letztlich den Spagat schaffen zwischen Mechatronik, Elektrotechnik, Bautechnik und weiteren Gebieten.

Letztendlich muss die Quintessenz der angewandten Mathematik für alle Bereiche der HTLs formuliert werden und in den neuen Aufgaben Ausdruck finden.

Beispiele wie das folgende aus dem Cluster der Elektrotechnik können dann nicht mehr eingesetzt werden, jedenfalls nicht in dieser Form:

Argumentieren Sie anhand der Beziehung  $u_c(t) = U_0(1 - e^{-t/(RC)})$ , warum eine Erhöhung des ohmschen Widerstands  $R$  bei unveränderter Kapazität  $C$  des Kondensators zu einem langsameren zeitlichen Anstieg der Kondensatorspannung  $u_c$  führt.  
(Wolfgang Timischl et Gerald Kaiser, 2017: 90)

Die Funktion dieser Aufgabe ist es, Wissen über das Modellieren von Funktionen im Kontext der Exponentialfunktion zu prüfen. Weil dieses Thema in allen Oberstufenformen vorkommt, ist das folgende Beispiel wegen seiner neutraleren Einkleidung künftig besser geeignet:

Eine Bakterienkultur wächst pro Stunde um 28 %, ausgehend von einer Anzahl  $y_0$  zum Zeitpunkt  $t=0$  h. Stelle die Wachstumsfunktion in der Form  $y(t) = y_0 \cdot a^t$  wie auch in der Form  $y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$  dar.  
(Wolfgang Timischl et Gerald Kaiser, 2012: 100)

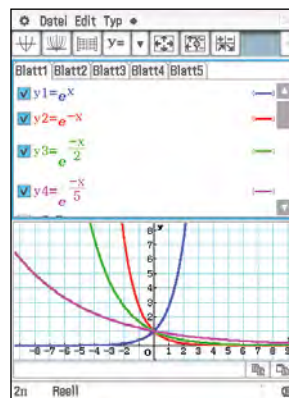
Für die komplexere Form der Exponentialfunktion wird zum Beispiel von einer Bakterienkultur ausgegangen, die sich nach einer bestimmten Zeit auf einem Niveau einpendelt, da das ökologische Umfeld ein unbegrenztes Wachstum nicht zulässt (etwa wegen eines begrenzten Nährstoffvorrats). Der Wert  $U_0$  vom ersten Beispiel steht für diese obere Schranke. Die Größen  $R$  und

$C$  könnten dann als biologische Faktoren, wie Umgebungstemperatur, Art der Bakterien etc., neu gestaltet werden:

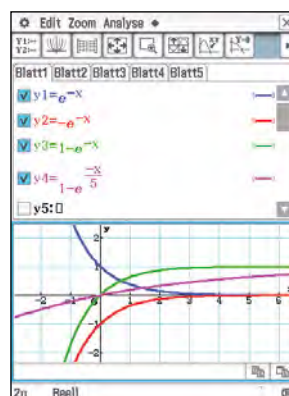
Argumentieren Sie anhand der Beziehung für das Wachstum einer Bakterienkultur  $y(t) = y_0(1 - e^{-t/k})$ , warum eine Erhöhung des Faktors  $k$  einem langsameren zeitlichen Anstieg der Bakterienzahlen  $y$  entspricht.

Die hier besprochenen Beispiele kommen aus dem Bereich „Argumentieren“ und fordern nicht direkt einen Technologieeinsatz, dieser ist aber in der Bewusstseinsbildung um den Themenbereich „Modellieren von Funktionen“ im Unterricht von großem Nutzen und bei der Veranschaulichung ein zeit-effizientes Werkzeug.

Dem Argumentieren geht ein Experimentieren am Gerät und ein Herantasten mit verschiedenen Werten für die Parameter voraus.

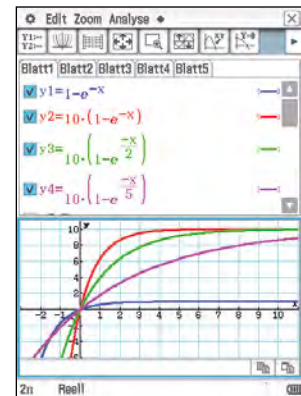


Hilfreich ist es, Teile der Funktion isoliert zu betrachten. Die Modellierung beginnt mit der Grundfunktion  $e^x$  und deren Spiegelung an der  $y$ -Achse  $e^{-x}$ , sodann mit den verschiedenen Werten für  $k$ , die in anderer Schreibweise auch als Wurzeln dargestellt werden können. Gerade dieser Bezug macht es Schülerinnen und Schülern leichter zu verstehen, warum der Funktionsgraph gestaucht wird.



Das zweite Bild zeigt, wie Modellierung durch die  $e$ -Funktion gezielt vorbereitet wird. Das negative Vorzeichen der Basis bewirkt die Spiegelung an der  $x$ -Achse; so entsteht eine Exponentialfunktion, die trotz eines negativen Vorzeichens im Exponenten steigt. Der Wert 1 vor  $-e^{-x}$  führt zu einer horizontalen Verschiebung des Funktionsgraphen nach oben und schließlich wieder zum Faktor  $k=5$ , der eine Stauchung des Graphen auslöst.

Zum Abschluss folgt noch ein Vergleich der gegebenen Funktionen mit verschiedenen Werten für  $k$ .



Die waagerechten Obergrenzen der ersten drei Funktionen sind bei  $y=1$  bzw.  $y=10$  gut zu erkennen.

Ziel dieser Modellierungen ist es, Sicherheit bei Spiegelungen an den Achsen und bei Verschiebungen von Funktionsgraphen zu gewinnen – und dies am ClassPad kontrollieren zu können.

Einen Bezug zu Exponentialfunktionen haben auch Differentialgleichungen: Die erster Ordnung sind Teil der berufsspezifischen Fokussierung an HTLs. Ein Beispiel zu Newtons Abkühlungs- bzw. Erwärmungsgesetz zeigt, dass viele Fachrichtungen der HTLs erfasst werden.

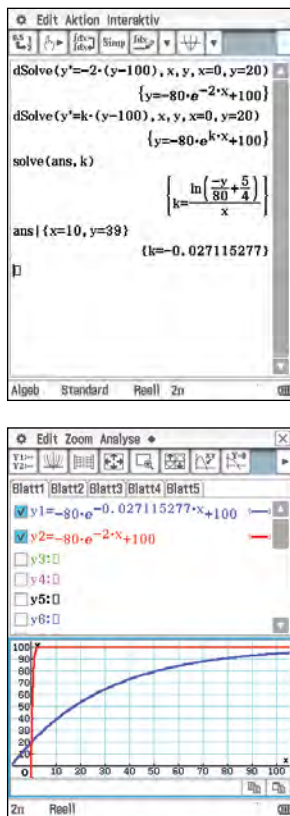
Eine kleine Metallkugel der Temperatur  $20^\circ\text{C}$  wird zum Zeitpunkt  $t=0$  s in siedendes Wasser geworfen. Besitzt die Kugel zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  s die Temperatur  $T(t)$  in Grad Celsius, so gilt:  $dT/dt = k \cdot (T - T_u)$  mit  $T_u = 100^\circ\text{C}$ ,  $k$  ist eine Konstante.

Zum Zeitpunkt  $t=10$  s beträgt ihre Temperatur  $39^\circ\text{C}$ .

a) Die Kugel erwärmt sich. Erkläre, welches Vorzeichen daraus für die Konstante  $k$  folgt.

b) Löse die Differentialgleichung. [...]

c) Interpretiere die Lösung als einen beschränkten Wachstumsvorgang. (Wolfgang Timischl et Gerald Kaiser, 2014: 146)



**Wo liegen die Gefahren in der Prüfungssituation?**

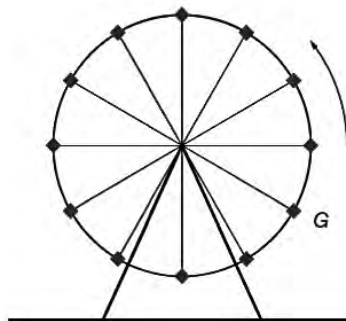
Beim folgenden Beispiel haben die Prüflinge der Elektrotechnik gar nicht mehr erkannt, dass es sich bei der Aufgabe eigentlich um ein „Heimspiel“ handelte.

Ein Riesenrad mit 12 gleichmäßig verteilten Gondeln dreht sich mit konstanter Ge-

schwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Die Höhe  $h(t)$ , in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt  $t$  über dem Boden befindet, ist:

$$h(t) = 15 \sin(\pi/60 \cdot t + \varphi) + 20$$

$t$ ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in s  
 $h(t)$ ... Höhe, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt  $t$  befindet, in m



- Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) sich eine Gondel entlang der Kreisbahn bewegt. [2 Punkte]

Die Gondel G befindet sich zur Zeit  $t=0$ s an der in der oben stehenden Skizze dargestellten Position.

- Dokumentieren Sie in Worten, wie Sie den Parameter  $\varphi$  für die Funktion  $h$  der Gondel G ermitteln können. [1 Punkt]

Das Beispiel ist der Probeklausur für die berufsbildenden höheren Schulen vom Schuljahr 2015/16 entnommen und ist unter <https://www.srdp.at/downloads/> direkt beim BMB verfügbar (aufgerufen am 23.02.2017). Sinusfunktionen und Schwingungen sind Kernkompetenzen in der Elektrotechnik. Aber offensichtlich war das Riesenrad in den Köpfen der Prüflinge so präsent, dass

sehr viele als Ursprung des Koordinatensystems den tiefsten Punkt gewählt haben. Der Bezug zur Elektrotechnik war für sie nicht erkennbar. Dies äußerte sich vor allem bei der letzten Fragestellung nach dem Phasenwinkel. Nicht wenige Prüflinge gaben den Winkel mit  $\pi/3$  und nicht mit  $-\pi/6$  an, da man ja ein Riesenrad üblicherweise unten besteigt und nicht rechts außen.

Dazu ist der offizielle Lösungsschlüssel und dessen Kommentar interessant:

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln  $30^\circ$ .  $\varphi$  wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen.

Der Winkel beträgt daher  $-30^\circ$  bzw.  $330^\circ$ , im Bogenmaß also  $-\frac{\pi}{6}$  bzw.  $\frac{11\pi}{6}$ .

Die im Beispiel angegebene Funktion würde sich aber wieder zum Modellieren von Funktionen eignen:

$$h(t) = 15 \sin(\pi/60 \cdot t + \varphi) + 20$$

Die Funktion kann ebenfalls organisch entwickelt werden, indem die Amplituden, die Winkelgeschwindigkeit oder auch die Phase verändert werden.

Timischl, Wolfgang et Gerald Kaiser. (2012) Ingenieur-Mathematik 2. Wien: Dornier.

Timischl, Wolfgang et Gerald Kaiser. (2014) Ingenieur-Mathematik 4. Wien: Dornier.

Timischl, Wolfgang et Gerald Kaiser. (2017) Ingenieur-Mathematik: Aufgabensammlung Reifeprüfung. 2. Ed. Wien: Dornier.

**Leserbrief**

Sehr geehrter Herr Baeger,

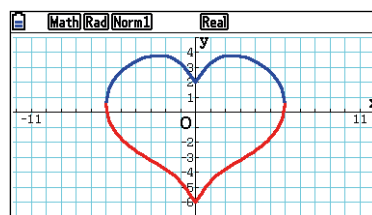
mit großem Interesse habe ich Ihren Beitrag „Kurven mit Herz“ gelesen. Völlig stimme ich Ihnen in Ihrer Meinung zu, dass durch das Fehlen des Themas Kurven in Schule und Hochschule wertvolle Potenzen des Mathematikunterrichts verschenkt werden. Dabei könnten durch den Einsatz dynamischer Mathematiksoftware gerade bei diesem Thema wertvolle Mathematikkenntnisse vermittelt werden. Zum Thema Kurven gehören bei mir auch die Kegelschnitte.

Bei Ihren Herzkurven habe ich die folgende vermisst:

$$f(x) = \frac{2}{3} \left\{ \frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2} \right\}$$

Die Graphen dieser Funktionen gezeichnet mit dem ClassPad II sind meines Erachtens besonders herzig.

Hier habe ich sie mit dem FX-CG20 gezeichnet.



Mit herzlichem Gruß

Wolfgang Ludwicky



Graphen dieser Funktion gezeichnet mit dem ClassPad II.



# ClassWiz: Übersicht zur Umrechnung verschiedener Einheiten (Teil 1)

Autor: Lutz Blöser, Frankfurt

Die Welt ist kompliziert. Natürlich mussten die Menschen, die sich austauschten und Handel trieben, Maße erfinden für Längen, Gewichte und vieles andere mehr. Durch die heutigen Möglichkeiten der Kommunikation sind wir alle gezwungen, die verschiedenen entstandenen Maßsysteme miteinander in Einklang zu bringen.

Maßnahmen zur Vereinheitlichung fanden zwar immer schon statt, der Weg hin zu einem einheitlichen System auf der ganzen Welt ist aber noch sehr weit. Was bedeutet es zum Beispiel in Euro pro Liter, wenn in den USA der Benzinpreis „3,87 Dollar per Gallon“ steht?

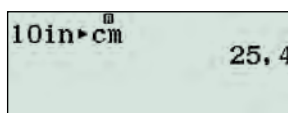
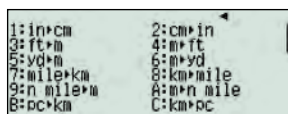
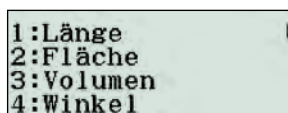
Der Umrechnungskurs Euro zu Dollar steht in der Zeitung, aber die Umrechnung Gallone zu Liter – die steht im ClassWiz.

Schaut man im ClassWiz unter „CONV“ (Shift 8) nach, öffnet sich ein umfangreiches Menü mit 21 Unterpunkten zur Umrechnung verschiedener Einheiten. Darunter sind auch solche, die unseren Alltag höchstens selten streifen. Im Wesentlichen handelt es sich um Umrechnungen zum englischen bzw. US-amerikanischen Einheitensystem.

In der gedruckten Anleitung findet sich – wie bei den Naturkonstanten – ein Hinweis auf eine Liste des NIST (National Institute of Standards and Technology): <https://www.nist.gov/physical-measurement-laboratory/special-publication-811>.

Ruft man diese Seite auf, gelangt man über <https://www.nist.gov/pml/nist-guide-si-appendix-b9-factors-units-listed-kind-quantity-or-field-science> zu den Werten, die im Rechner gespeichert sind.

Hier folgen nun einige Erklärungen:



Bildschirmdiagonalen werden in Zoll angegeben.

1. Länge					
ClassWiz (engl.)	Anwahl	Abkürzung	deutsch	Erklärung	Umrechnung in SI-Einheiten (mks-System, Meter-Kilogramm-Sekunde)
inch	1.1	in	Zoll	Zoll gehört zum englischen Maßsystem und ist abgeleitet von der Breite eines menschlichen Daumens bzw. der Länge des ersten Daumengliedes. Er ist bei uns heute noch gebräuchlich bei Gewindegrößen und Rohrdurchmessern.	1 in = $2,54 \cdot 10^{-2}$ m
foot	1.3	ft	Fuß	Fuß gehört zum englischen Maßsystem und ist abgeleitet von der Länge des menschlichen Fußes. Er ist heute noch üblich in der internationalen Luftfahrt für Höhenangaben. 1 ft = 12 in	1 ft = 0,3048 m
yard	1.5	yd	Yard	Yard gehört zum englischen Maßsystem. 1 yd = 3 ft	1 yd = 0,9144 m
mile	1.7	mi	Meile	Meile gehört zum englischen Maßsystem 1 mi = 1760 yd = 8 furlong (1 furlong = 10 chains = 22 yards)	1 mi = $1,609344 \cdot 10^3$ m
n mile	1.9	sm	Seemeile	Seemeile (auch nautische Meile) ist eine in der See- und Luftfahrt zugelassene Einheit. Sie leitet sich ab aus 1/60 eines Breitengrades = 1 Bogenminute auf einem Erdmeridian.	1 sm = 1852 m
parsec	1.B	pc	Parallaxen- sekunde	Dies ist die Entfernung, unter der der mittlere Abstand der Erde von der Sonne (die Astronomische Einheit AE) unter einem Sehwinkel von 1 Winkel- sekunde erscheint. 1 pc = 206265 AE	1 pc = $3,085678 \cdot 10^{16}$ m
Ang- ström	1.↓.1	Å	Angström	„Angström“ ist eine frühere, bis 31.12.1977 gesetzliche Längeneinheit, die in der Spektroskopie viel verwendet wurde. Sie ist benannt nach Anders Jonas Angström, einem schwedischen Physiker (1814–1874)	1 Å = $1 \cdot 10^{-10}$ m
fermi	1.↓.3	fm	Fermi	„Fermi“ ist eine Längenangabe, die in der Kern- physik immer noch gerne verwendet wird. Sie ist benannt nach dem Kernphysiker Enrico Fermi (1901-1954).	1 fm = $1 \cdot 10^{-15}$ m
chain	1.↓.5	ch	chain	„Chain“ ist eine Längeneinheit des englischen Maßsystems. 1 ch = 22 yd	1 ch = 20,11684 m
astro- nomical unit	1.↓.7	ua	Astro- nomische Einheit	Die „Astronomische Einheit“ ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne.	1 ua = $1,495979 \cdot 10^{11}$ m
light- year	1.↓.9	l.y.	Lichtjahr	1 Lichtjahr entspricht dem Weg elektromagnetischer Wellen (Licht), der im Vakuum in einem Jahr zurück- gelegt wird.	1 l.y. = $9,46073 \cdot 10^{15}$ m
10 <sup>-3</sup> inch	1.↓.B	mil	Millizoll	Dies gehört zum US-amerikanischen Einheitensystem. 1 mil = 1/1000 in	1 mil = $2,54 \cdot 10^{-6}$ m
fathom (US)	1.↓.↓.1	fath	nautischer Faden	Faden (fm) ist ein in der Seefahrt noch gebräuch- liches Maß für Tiefenmessungen. Früher: „Klafter“ (= Spannweite zwischen den ausgebreiteten Armen). Im ClassWiz basiert „fath“ auf dem „US survey foot“ (= 0,3048006m). 1 fath = 2 yd = 6 ft = 72 in	1 fath = 1,828804 m
2. Winkel					
revo- lution	4.1	r	Umdre- hungszahl als Winkel- angabe	Revolution ist ein Winkelmaß das Winkel als Anteil einer vollen Umdrehung angibt.	1 r = 6,283185rad
3. Beschleunigung					
Gal	↓.4.1	Gal	Gal	Die Einheit ist nach Galilei Galileo benannt und wird in den Geowissenschaften gerne verwendet. Sie ist aus dem cgs-System (Zentimeter-Gramm-Sekunde) abgeleitet.	1 Gal = $1 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2}$

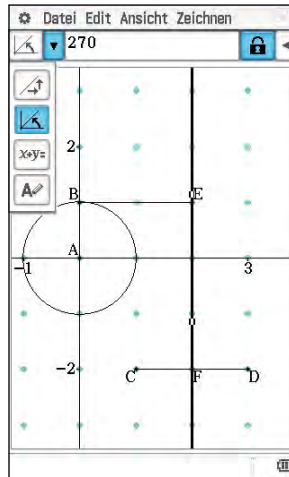
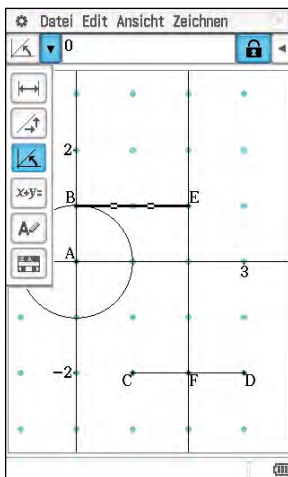
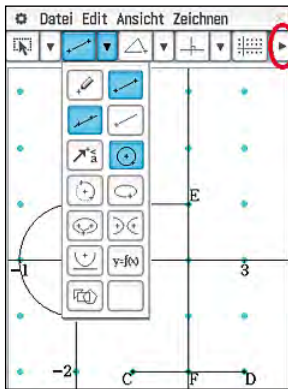
# Konstruktion der Sinus-Funktion am Einheitskreis

Autor: CASIO Educational Team

In der Geometrie-App des ClassPad ist es in wenigen Schritten möglich eine Animation zu erstellen, die die Herkunft der Sinusfunktion veranschaulicht. Der Sinus entsteht während der Animation vor den Augen des Betrachters, indem ein Punkt den Einheitskreis durchläuft und dessen Höhe über der x-Achse gegen eine Strecke der Länge 2 abgetragen wird.

Die Orte des Punktes, der die jeweilige Höhe anzeigt, werden verfolgt, sodass seine Spur die Sinus-Kurve entstehen lässt.

Wie im Bild zu sehen, wird das Koordinatensystem eingeschaltet (☰), nach links verschoben (zweimal Cursor rechts) und vergrößert (+). Dann wird ein Einheitskreis mit Radius AB erzeugt (⊙), eine Strecke CD der Länge 2 (↔), eine senkrechte Gerade durch E und F (⊥) und die waagerechte Verbindung BE vom Kreis zur Geraden (—). Um zu erreichen, dass weder die Gerade noch die Kreisverbindung sich während der Animation neigen, muss deren Steigung fest eingestellt werden:

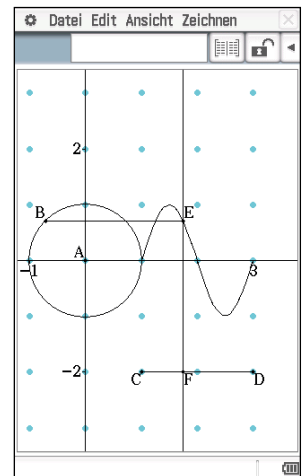
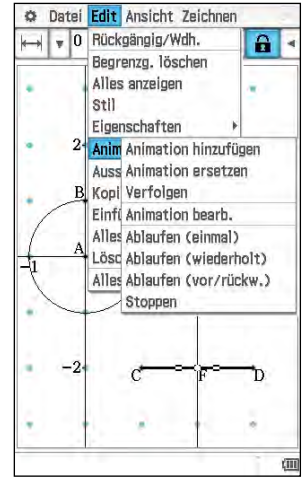
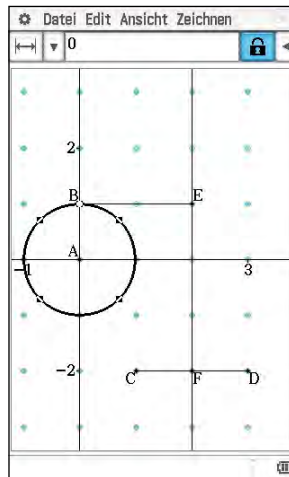


Um eine Animation zu definieren, muss ein Punkt markiert werden und eine Linie, über die er laufen soll. Werden zwei Animationen definiert, dann ersetzt die zweite nicht die erste, sondern beide laufen gleichzeitig.

Hier soll B den Kreis umrunden und F dazu parallel die Strecke CD durchlaufen.

Also werden B und der Kreis ausgewählt (an eine freie Stelle tippen, B antippen, den Kreis antippen) und die Animation definiert (Edit, Animieren, Animation hinzufügen), ebenso für F auf der Strecke CD (an eine freie Stelle tippen, F antippen, CD antippen, Edit, Animieren, Animation hinzufügen).

Nun muss noch die Verfolgung des Ortes von E eingestellt werden (an eine freie Stelle tippen, E antippen, Edit, Animieren, Verfolgen). Dann kann die Animation starten (Edit, Animieren, Animation Ablaufen).



## Ebenso funktioniert es mit dem FX-CG20/50:

Geometrie öffnen (Menu, H) und im Setup (Shift, Menu) Raster (Grid) und Achsenkalibrierung anschalten (F3), Koordinatensystem zurechtlegen (., →→, +, ., ↓).

Kreis AB (F3, 6, 7, ↓↓↓, Exe, 7, Exe, AC), Strecke CD (F3, 2, 1, 10 x →, Exe, 2, →→→, Exe, AC), Gerade EF (F3, 3, 8, Exe, 2, Exe, AC), Strecke BE einfügen (F3, 2, zu E, Exe, zu B, Exe, AC).

Neigung der Strecke BE festsetzen (BE mit Exe markieren, Vars, ←↑↑, Exe, →→, Exe, Exit, AC), Neigung der Strecke EF festsetzen (EF mit Exe markieren, Vars, ←↑↑, Exe, →→, Exe, Exit, AC).

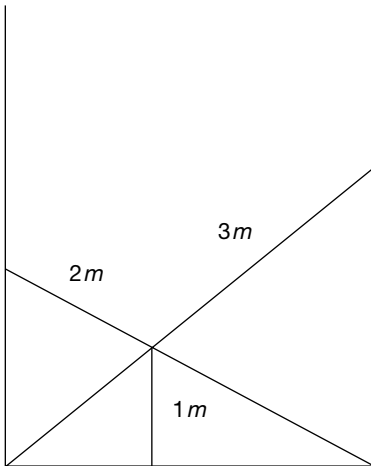
B/Kreis-Animation definieren (B und den Kreis jeweils mit Exe markieren, F6, 1, AC), F/CD-Animation definieren (F und die Strecke CD jeweils mit Exe markieren, F6, 1, AC), Orte von E dabei zeichnen lassen (E mit Exe markieren, F6, 3, AC), Animation starten (F6, 5).

# Leiteraufgaben

Autor: Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

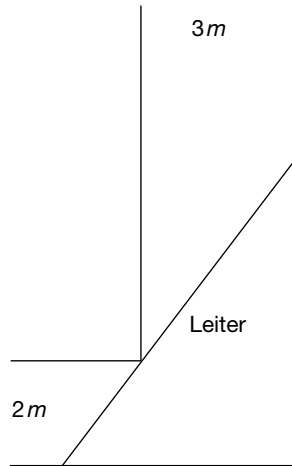
### Knobelei 1

Zwei Leitern stehen quer in einem Flur und kreuzen sich in einer Höhe von 1 m. Die eine Leiter ist 2 m lang die andere 3 m. Berechne die Breite des Flures.



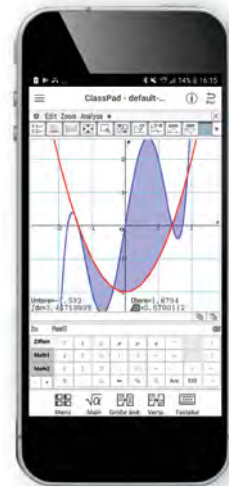
### Knobelei 2

Eine Leiter soll einen Flur der Breite 3 m entlang getragen werden. Unglücklicherweise verläuft der Flur am Ende rechtwinklig mit der Breite 2 m weiter. Wie lang darf eine Leiter sein, damit sie gerade noch horizontal um die Ecke getragen werden kann?



## ClassPad II Manager – jetzt auch als App

Seit Kurzem ist eine neue Mathematik-App auf allen gängigen Tablet- und Handy-Plattformen erhältlich. Die App hat den vom ClassPad bekannten Bedienkomfort und die über lange Jahre weiterentwickelten Möglichkeiten für den Einsatz in der Schule. Eine kostenlose Version mit eingeschränkten Funktionen (jedoch völlig ausreichend für die Mittelstufe) wird sowohl im Google-Playstore als auch im iTunes-Store zum Download angeboten. Für PC und Notebooks wird neben Windows dann auch MacOS unterstützt werden.



## Neuerungen im FX-991DE X

# Rechnen mit komplexen Zahlen

Autor: Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

Mittels **MENU** **2** wird der Modus „2: Komplexe Zahlen“ eingestellt. Im SETUP-Menü kann festgelegt werden, ob die komplexen Zahlen in der Standardform  $a+bi$  oder in der Versorform  $r \angle \varphi$  angezeigt werden.

Die Versorform ist eine verkürzte Darstellung der trigonometrischen Form

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Alle vier Grundrechenoperationen sind mit dem FX-991DE X für komplexe Zahlen ausführbar; anders als bei früheren Modellen darf der Exponent einer Potenz von  $z$  beliebig groß sein.

So kann auch der Term  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$  berechnet werden.

Der CASIO FX-991DE X verfügt über folgende Befehle für komplexe Zahlen:

- Betrag
- Argument
- Konjugierte
- Realteil
- Imaginärteil
- Umwandlung in Versorform
- Umwandlung in Standardform

### Berechnung von $\sqrt[n]{a+bi}$

Der Ausdruck  $\sqrt[n]{a+bi}$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  hat im Komplexen  $n$  verschiedene Werte.

Das sind die  $n$  verschiedenen Lösungen der Gleichung  $w^n = a+bi$ .

Es gilt für  $z = a+bi$

$$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos\left(\frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right) \right)$$

mit  $k=0,1,2,\dots,k-1$ .

### Ein Beispiel

Es sind die drei Werte für  $\sqrt[3]{10-5i}$  zu berechnen.

Die allgemeine Formel wird in folgender Form eingegeben

Mithilfe der **CALC**-Taste wird dieser Ausdruck für  $x=0, 1$  und  $2$  berechnet.

Dazu wird für  $A = 10 - 5i$  und für  $B = 3$  eingegeben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{10-5i}_0 &\approx 2,209 + 0,344i; \\ \sqrt[3]{10-5i}_1 &\approx -0,807 + 2,086i; \\ \sqrt[3]{10-5i}_2 &\approx -1,403 - 1,741i. \end{aligned}$$

## Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen in österreichischen Lehrplänen harmonisiert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaustausch zum Beispiel zu folgenden Themen:

- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten
- Informationen zu regionalen Veranstaltungen
- Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien
- bundeslandspezifische Angebote
- Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.



### Anmeldung

Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten. Dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

### Anmeldung im Netz

Unter dieser Web-Adresse können Sie unsere Informationen abonnieren:  
**www.casio-schulrechner.at/lehrer-info-service**



### Anmeldung per QR-Code

Scannen Sie einfach den QR-Code.



### Educational Team

Unsere Spezialisten rund um das Thema Schulrechner von CASIO und deren Einsatz im Mathematikunterricht stehen Ihnen bei Fragen jederzeit zur Verfügung:  
 Telefon: +49 (0)40/528 65-0  
 Fax: +49 (0)40/528 65-100  
 E-Mail: education-austria@casio.de  
 Homepage: www.casio-schulrechner.at

### CASIO European Support Center

Für Beratung und technische Informationen wenden Sie sich an das CASIO European Support Center:  
 Telefon: +49 (0)40/528 65-802  
 Fax: +49 (0)40/528 65-888  
 E-Mail: support\_center@casio.de

### Anfragen zu Reparaturen

Bei Fragen rund um das Thema Reparatur stehen Ihnen Experten unter folgenden Kontaktdaten zur Verfügung:  
 Telefon: +49 (0)40/528 65-203  
 Fax: +49 (0)40/528 65-242  
 E-Mail: repair@casio.de

## Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.2000
ClassPad 330 Plus	3.10.6000
FX-CG20/50	3.10
FX-9860GII	2.09
<b>Software</b>	
ClassPad II Manager Subscription	2.01.2000
ClassPad Manager	3.06.6000
FX-CG20/50 Manager	3.10 <sup>1</sup>
FX-Manager Plus	2.09
ClassWiz Emulator Subscription	2.00

<sup>1</sup>Ab Oktober 2017 verfügbar      Stand: September 2017



## CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

### Support-Programm

- Kooperationsschulen
- Lehrer-Fortbildungen und Webinare
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

**Herausgeber:**  
 CASIO Europe GmbH  
 Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt  
 Tel.: +49 (0)40/528 65-0  
 Fax: +49 (0)40/528 65-535

**Bildquellen:**  
 S. 1: M. Mettin

**Vertriebspartner Österreich:**  
 Ivo Haas GmbH  
 Saalachstraße 36 • 5020 Salzburg  
 Tel.: 0662/430 567-0 • Fax: 0662/430 567-83  
 E-Mail: casio@ivohaas.com

Copyright für alle Beiträge, soweit nicht anders angegeben, bei CASIO Europe GmbH. Für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen wird keine Haftung übernommen. Nachdruck nur mit schriftlicher Genehmigung und Urhebervermerk.

**Redaktion:**  
 Gerhard Glas und Armin Baeger  
 CASIO Educational Team • education@casio.de

**Design:**  
 CONSEQUENCE  
 Werbung & Kommunikation GmbH, HH

